Monodromy

May 15, 2008. Utrecht

§ 1. Examples

- linear differential equations (including: hypergeom. D.E.)
- polynomial equations (Galois theory)
- history about "monodromy"

§ 2. Elliptic curves (Legendre family)

- review about elliptic curves
- relation to hypergeom. DE
- use hypergeom. DE to deduce a class nber formula from geometry

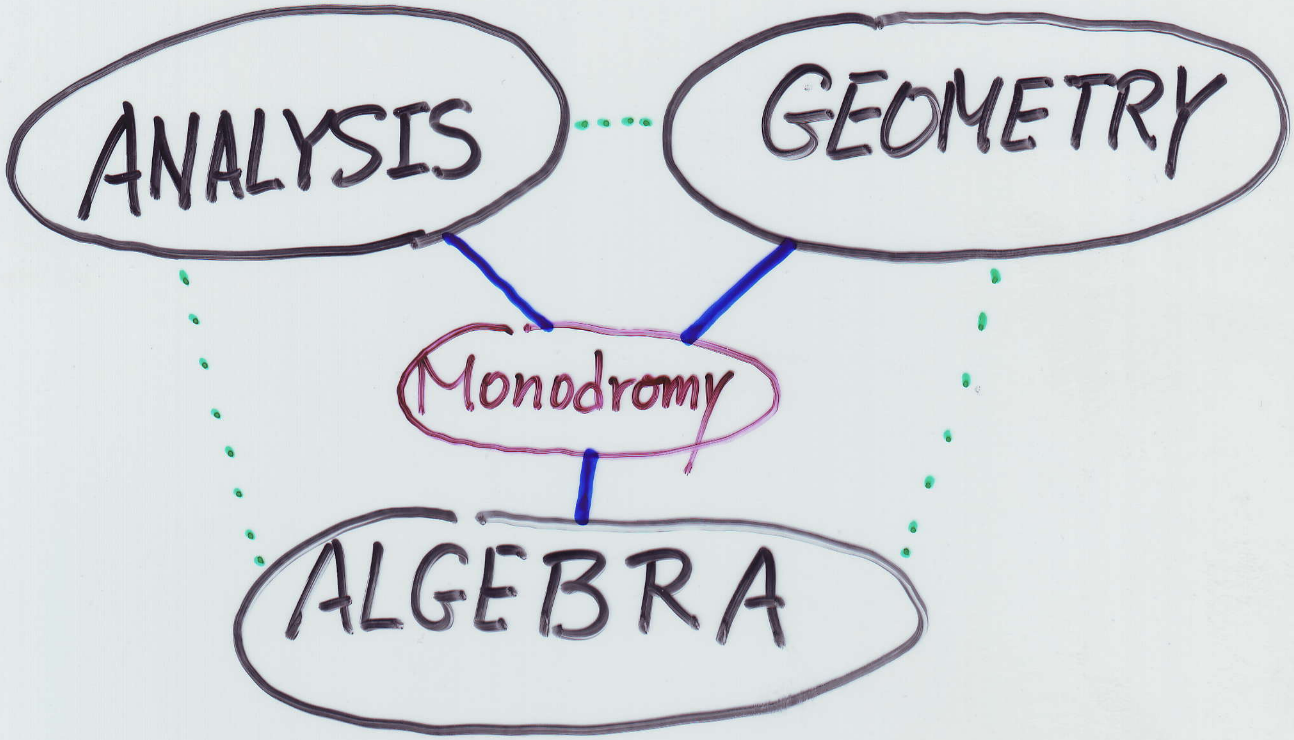
Eichler 1938
(Deuring 1941, "nicht leicht"
Igusa 1958

$p > 3$

$$h_p = \begin{cases} \lfloor \frac{p}{12} \rfloor & p \equiv 1 \ (12) \\ \lceil \frac{p}{12} \rceil & p \equiv 5, 7 \ (12) \\ \lceil \frac{p}{12} \rceil + 1 & p \equiv 11 \ (12) \end{cases}$$

§ 3. p-adic monodromy of elliptic curves

§ 4 p-adic monodromy of Hilbert modular varieties



Gauss

Galois

Riemann

Jordan

Fuchs

Poincare

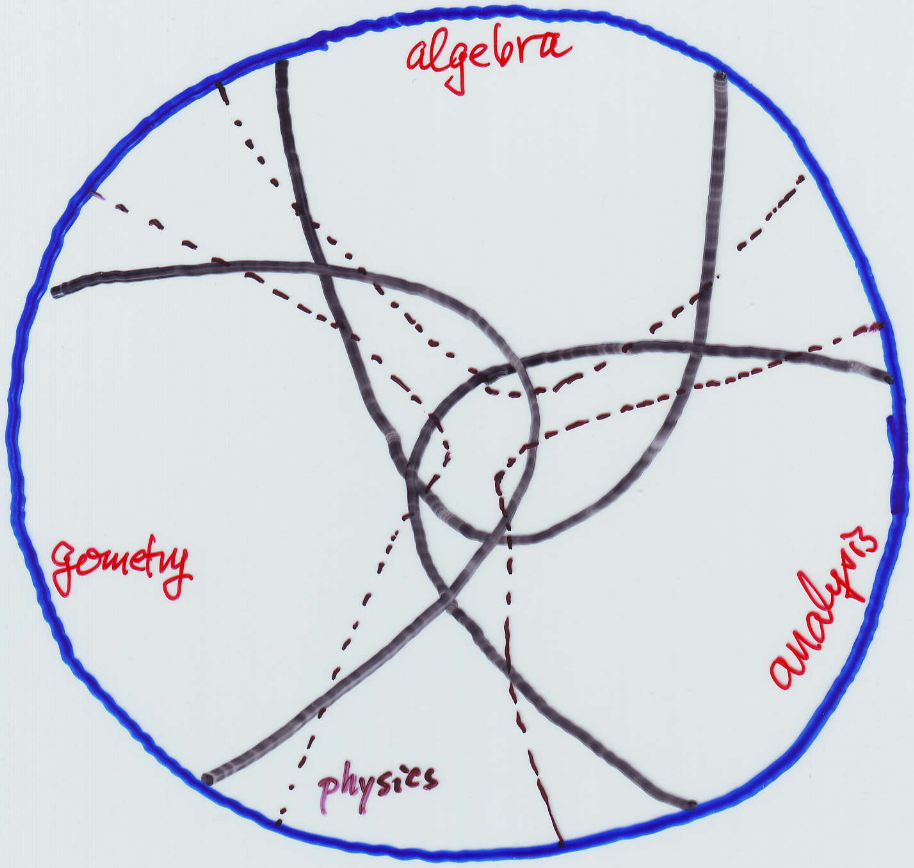
Picard

Lefschetz

Grothendieck

Deligne (Hilbert's 21st.)

+ many, many more



monodromy - centric view

Monodromy

May 15 Utrecht

§ 1 Examples

1.1 Linear differential equations

a) $x\frac{dy}{dx} - ay = 0 \qquad a \in \mathbb{C}$

b) $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = 0$

c) $4x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + 4(1-2x)\frac{dy}{dx} - y = 0$

solutions:

a) $y = \text{const.}\ x^a$

generally multi-valued.
finitely-many-valued iff $a \in \mathbb{Q}$
monodromy group = a quotient of $\mathbb{Z}$.

b) $y = c_1 x + c_2 x \log x$

monodromy group $= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : b \in \mathbb{Z} \right\} \cong \mathbb{Z}$.

c) is a specical case of

c') $x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+[c-(a+b+1)x]\frac{dy}{dx}-aby=0$

classical solution which is holomorphic at $x=0$:

$$\boxed{F(a,b,c;x)=\sum_{n\geq 0}\frac{(a)_n\cdot(b)_n}{(c)_n\cdot n!}x^n \quad \text{where } (a)_n:=a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)}$$

esp. a solⁿ of c) holomorphic at $x=0$ is

$$\boxed{F(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},1,x)=\sum_{n\geq 0}\left(\frac{(\frac{1}{2})_n}{n!}\right)^2 x^n=\sum_{n\geq 0}\binom{-\frac{1}{2}}{n}^2 x^n}$$

Monodromy group of c)

$= $ a subgroup of finite index in $SL_2(\mathbb{Z})$

$=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in SL_2(\mathbb{Z}):\ \begin{matrix} a\equiv d\equiv 1 \pmod 2 \\ b\equiv c\equiv 0 \pmod 2\end{matrix}\right\}$

$=:\Gamma(2)$

12. Digression:

"monodromy" means: run around singly

(? first) used in

Riemann, Beiträge zur Theorie der durch die Gauss'sch Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ darstellbaren Functionen
(Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 7 (1857) 3-32)

2nd page

...; für einen Werth, in welchem keine Verzweigung statfindet, heist die Function "einändrig order monodrom"

IV.

Beiträge zur Theorie der durch die Gauss'sche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ darstellbaren Functionen.

(Aus dem siebenten Bande der Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. 1857.)

Die Gauss'sche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, als Function ihres vierten Elements x betrachtet, stellt diese Function nur dar, so lange der Modul von x die Einheit nicht überschreitet. Um diese Function in ihrem ganzen Umfange, bei unbeschränkter Veränderlichkeit dieses ihres Arguments, zu untersuchen, bieten die bisherigen Arbeiten über dieselbe zwei Wege dar. Man kann nämlich entweder von einer lineären Differentialgleichung welcher sie genügt ausgehen, oder von ihrem Ausdrucke durch bestimmte Integrale. Jeder dieser Wege gewährt eigenthümliche Vortheile; jedoch ist bis jetzt, in der reichhaltigen Abhandlung von Kummer im 15. Bande des mathematischen Journals von Crelle und auch in den noch unveröffentlichten Untersuchungen von Gauss*), nur der erste betreten, wohl hauptsächlich desshalb, weil die Rechnung mit bestimmten Integralen zwischen complexen Grenzen noch zu wenig ausgebildet war, oder doch nicht als einem grossen Leserkreise geläufig vorausgesetzt werden konnte.

In der folgenden Abhandlung habe ich diese Transcendente nach einer neuen Methode behandelt, welche im Wesentlichen auf jede Function, die einer lineären Differentialgleichung mit algebraischen Coefficienten genügt, anwendbar bleibt. Nach derselben lassen sich die früher zum Theil durch ziemlich mühsame Rechnung gefundenen Resultate fast unmittelbar aus der Definition ableiten, und dies ist in dem hier vorliegenden Theile dieser Abhandlung geschehen, hauptsächlich in der Absicht für die vielfachen Anwendungen dieser Function in physikalischen und astronomischen Untersuchungen eine bequeme Uebersicht über ihre möglichen Darstellungen zu geben. Es ist nöthig, einige allgemeine Vorbemerkungen über die Betrachtung einer Function bei unbeschränkter Veränderlichkeit ihres Arguments voraufzuschicken.

*) Gauss Werke. Bd. III 1866. S. 207. W.

Betrachtet man den Werth der unabhängig veränderlichen Grösse $x = y + zi$ zur leichteren Auffassung ihrer Veränderlichkeit als vertreten durch einen Punkt einer unendlichen Ebene, dessen rechtwinklige Coordinaten y, z sind, und denkt sich die Function w in einem Theile dieser Ebene gegeben, so kann sie von dort aus nach einem leicht zu beweisenden Satze nur auf eine Weise der Gleichung $\frac{\partial w}{\partial z} = i \frac{\partial w}{\partial y}$ gemäss stetig fortgesetzt werden. Diese Fortsetzung muss selbstredend nicht in blossen Linien geschehen, worauf eine partielle Differentialgleichung nicht angewandt werden könnte, sondern in Flächenstreifen von endlicher Breite. Bei Functionen, welche, wie die hier zu untersuchende, „mehrwerthig" sind oder für denselben Werth von x je nach dem Wege, auf welchem die Fortsetzung geschehen ist, mehrere Werthe annehmen können, giebt es gewisse Punkte der x-Ebene, um welche herum sich die Function in eine andere fortsetzt, wie z. B. bei $\sqrt{(x-a)}$, $\log(x-a)$, $(x-a)^{\mu}$, wenn μ keine ganze Zahl ist, der Punkt a. Wenn man von diesem Punkte a aus sich eine beliebige Linie gezogen denkt, so kann der Werth der Function in der Umgebung von a so gewählt werden, dass er sich ausserhalb dieser Linie überall stetig ändert; sie nimmt aber dann zu beiden Seiten dieser Linie verschiedene Werthe an, so dass die Fortsetzung der Function über diese Linie hinüber eine von der jenseits schon vorhandenen verschiedene Function giebt.

Zur Erleichterung des Ausdrucks sollen die verschiedenen Fortsetzungen Einer Function für denselben Theil der x-Ebene „Zweige" dieser Function genannt werden und ein Werth von x, um welchen herum sich ein Zweig einer Function in einen andern fortsetzt, ein „Verzweigungswerth"; für einen Werth, in welchem keine Verzweigung stattfindet, heisst die Function „einändrig oder monodrom".

1.

Ich bezeichne durch

$$P \begin{Bmatrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix}$$

eine Function von x, welche folgende Bedingungen erfüllt:

1. Sie ist für alle Werthe von x ausser a, b, c einändrig und endlich.

2. Zwischen je drei Zweigen dieser Function P', P'', P''' findet eine lineäre homogene Gleichung mit constanten Coefficienten Statt,

$$c' P' + c'' P'' + c''' P''' = 0.$$

(after Riemann)

Monodromy problem:

Find the element of $GL_n(\mathbb{C})$ which gives the effect when a fund. system of solutions of an ODE of order n (with an isolated sing.) is analytically continued along a path which goes around the singularity once.

Fuchs, Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten. J. de Crelle, t VI, pp. 121–160, 1866

Current usage of "monodromy",
"monodromy group" or "monodromy repr.":

the **obstruction** which prevents the solutions from being "monodrom" as meant by Riemann

Pushing further:

Monodromy
$\longleftrightarrow$ hidden symmetry which governs the system

(ideas of Grothendieck:
algebraic fundamental group,
monodromy group of a Tannakian category,
etc.)

1.3. Polynomial equations

(global) monodromy group $\longleftrightarrow$ Galois group

(a) $x^n + t_1 x^{n-1} + t_2 x^{n-2} + \cdots + t_{n-1} x + t_n = 0$

$t_1, \dots, t_n$ alg. indep $/ k$ ← base field

$$\mathrm{Gal}\big(k(x_1, \dots, x_n) / k(t_1, \dots, t_n)\big) \cong S_n$$

solutions/roots of (a)

Aside

$/\mathbb{Q}$: $x^n - x + 1 = 0$ has

Galois group S_n $/\mathbb{Q}$

(b) $X^{p^n} + s_1 X^{p^{n-1}} + s_2 X^{p^{n-2}} + \cdots + s_{n-1} X^p + s_n = 0$

$k \supseteq \mathbb{F}_p$, $s_1, \ldots, s_n$ alg. indep. over k

(generic additive polynomial)

$u_1, \ldots, u_n$: roots of (b).

Then $\mathrm{Gal}(k(u_1, \ldots, u_n) / k(s_1, \ldots, s_n))$

$\cong GL_n(\mathbb{F}_p)$

Sketch proof of (b)

Lemma: $\underset{\mathbb{F}_p}{\overset{\cup\!\shortmid}{K}}$ a field, $G \subseteq (K,+)$ additive subgroup

Then
$f_G(x) := \prod_{\sigma \in G} (x-\sigma)$ is an additive polynomial

hence of the form $\sum_{i=0}^{n} a_i x^{p^i}$, $p^n = \# G$

Pf.: $f_G(x+y) - f_G(x)$, considered as a polynomial of y with coeff. in $K(x)$, has elements of G as roots, hence $= f_G(y)$.

Apply Lemma to:

$K = k(U_1, \dots, U_n)$ purely trans. $/ k \supseteq \mathbb{F}_p$

$G =$ the subgroup of $(K,+)$ gen. by $U_1, \dots, U_n$

$\rightsquigarrow f_G(X) = X^{p^n} + S_1 X^{p^{n-1}} + \dots + S_{n-1} X^p + S_n$

- Clearly $S_1, \dots, S_n$ are alg. indep. $/k$
- Every elt. of $GL_n(\mathbb{F}_p)$ defines an autom. of $k(U_1, \dots, U_n) / k(S_1, \dots, S_n)$

§ 2 Legendre family of elliptic curves

2.1

$$\boxed{\begin{array}{l} y^2 = x(x-1)(x-\lambda) \quad \text{affine coord.} \\ \text{or} \\ Y^2Z = X(X-Z)(X-\lambda Z) \\ \qquad \text{proj. coord. for } \mathbb{P}^2 \\ \lambda \in \mathbb{C} - \{0, 1\} = \mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\} \end{array}}$$

- $\forall \lambda \in S = \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$, get a smooth cubic in $\mathbb{P}^2$ (presented as a double cover of $\mathbb{P}^1$)
  $\rightsquigarrow$ an elliptic curve E_λ

  "∞" = the zero point

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \xrightarrow{\pi} & S \\ \cup\!\shortmid & & \Downarrow \\ E_\lambda & \longmapsto & \lambda \end{array}$$

- The j-invariant

$$j(E_\lambda) = \frac{2^8\,[1-\lambda(1-\lambda)]^3}{\lambda^2 (1-\lambda)^2}$$

<u>So</u>: $\lambda\text{-line} \big/ j\text{-line}$ is a 6–1 cover

This cover is Galois; the 6 conjugates of λ are:

$$\lambda,\ \frac{1}{\lambda},\ 1-\lambda,\ \frac{1}{1-\lambda},\ \frac{\lambda}{\lambda-1},\ \frac{\lambda-1}{\lambda}$$

well-known:

$$j\text{-line} \cong \mathbb{H} \big/ SL_2(\mathbb{Z})$$

(So it is at least plausible that the monodromy of the hypergeom. diff. eq^n for $\underline{H}^1(\mathcal{E}/S)$ is $\Gamma(2) \subseteq SL_2(\mathbb{Z})$)

2.2 Differential equation (vector bundle with connection) for the family of alg. de Rham cohomology for $\{E_\lambda\}_{\lambda \in S}$

- Review alg. de Rham cohomology of an alg. curve C (proper, smooth):

$$H^1_{dR}(C) \cong \left\{ \begin{array}{l} \text{differentials of the} \\ 2^{nd} \text{ kind, i.e. merom.} \\ \text{with 0 residues} \end{array} \right\} \Big/ (\text{exact})$$

For $\mathcal{E} \xrightarrow{\pi} S$, as λ varies in S, get a vector bundle of rank 2 over S, denoted by $\underline{H}^1_{dR}(\mathcal{E}/S)$

- connection:

obtained by differentiating differentials of the 2^{nd} kind with parameter λ (w.r.t. λ)

diff. eq^n for $\underline{H}^1_{dR}(\mathcal{E}/S)$:

$$\boxed{\left[4\lambda(1-\lambda)\frac{d^2}{d\lambda^2}+4(1-2\lambda)\frac{d}{d\lambda}-1\right]\left(\frac{dx}{y}\right) = -\,d\left(\frac{y}{(x-\lambda)^2}\right)}$$

same as the diff. eq^n for $F(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,\lambda)$

2.3. Digression:

(surprising!) use of the hypergeom. diff. eqn for $H^1_{dR}(\mathcal{E}/S)$:

Background review:

- Each E_λ has a group law:

  "∞" = zero point for the gp law

  $$\sum_{P \in \text{a plane section}}^{!} P = 0$$

- Over $k = \bar{k} \supseteq \mathbb{F}_p$

$$E[p](\bar{k}) \cong \begin{cases} 0 & \text{.... "supersingular"} \\ \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & \text{.... "ordinary"} \end{cases}$$

$$\left(\rightsquigarrow E[p^m](\bar{k}) \cong \begin{cases} 0 \\ \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} \end{cases} \forall m \right)$$

The two cases are distinguished by a polynomial function $A(\lambda)$ on S

"Hasse invariant"

$$\boxed{A(\lambda) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \cdot \sum_{j=0}^{(p-1)/2} \left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_j}{j!} \right)^2 \lambda^j}$$

Deuring 1941

compare with

$$F\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \overset{1}{\cancel{\tfrac{1}{2}}}, \lambda\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^{\,2}}{(n!)^2} \lambda^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n$$

<u>Note</u> · $a_n \in \mathbb{Z}_{(p)} \quad \forall n \quad$ if $\underline{p > 2}$

$$\therefore \quad \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n}{n!} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n \, n!}$$

$$= \frac{(2n-1)!}{n! \, (n-1)! \, 2^{2n-1}}$$

- $a_{\frac{p+1}{2}} \equiv \cdots \equiv a_{p-1} \equiv 0 \pmod{p}$

Consequence:

(i) $$\left[4\lambda(1-\lambda)\frac{d^2}{d\lambda^2} + 4(1-2\lambda)\frac{d}{d\lambda} - 1\right] A(\lambda)$$

$$\equiv 0 \pmod p \qquad \text{if } p>3$$

(so $a_{\frac{p+1}{2}} \equiv a_{\frac{p+3}{2}} \equiv 0 \pmod p$)

(ii) $A(\lambda)$ has <u>simple</u> zeroes

(<u>Note</u>: $\lambda \not\equiv 0, 1$. $p>3$, so the coeff. of $\frac{d^2}{d\lambda^2}$ is $\not\equiv 0 \pmod p$)

(Igusa's theorem)

Proc. Nat. Acad. Sci. 44 (1958), 312–314

Aside

- Once one knows that $A(\lambda)$ has simple zeroes, it is easy to compute the # of supersingular j-invariants through the 6-1 cover $(\lambda\text{-line}) \longrightarrow (j\text{-line})$

- # of supersing j-invariants h_p $\sim \left(\frac{p-1}{2}\right)/6 \sim \frac{p}{12}$

$$h_p = \begin{cases} \lfloor \frac{p}{12} \rfloor & p \equiv 1 \quad (12) \\ \lceil \frac{p}{12} \rceil & p \equiv 5, 7 \quad (12) \\ \lceil \frac{p}{12} \rceil + 1 & p \equiv 11 \quad (12) \end{cases}$$

- $h_p =$ class nber of $Q_{p,\infty}$ ← quat. alg $/\mathbb{Q}$ ramified at p & ∞

computed by Eichler in 1938. Deuring 1941 thought that it is **nicht leicht** that this class # formula can be obtained by counting super-sing j-inviants directly.

Monodromy problem in different contexts

Context	Target of monodromy representation
Diff. Eq. (vector bundles with connection)	closed subgroups of $GL_n(\mathbb{C})$
local systems (w. integral structure)	subgroups of $GL_n(\mathbb{Q})$ (or $GL_n(\mathbb{Z})$)
ℓ-adic cohomology (ℓ: invertible in the scheme)	closed subgroup of $GL_n(\mathbb{Q}_\ell)$ (or $GL_n(\mathbb{Z}_\ell)$)
p-adic cohomology (p not invertible in base scheme)	• $GL_n(\mathbb{Q}_p)$ or $GL_n(\mathbb{Z}_p)$ (mixed char.) p-adic étale cohom. • $GL_n(B(k))$ ← frac $W(k)$ crystalline cohomology/isocrystals • subgroups of $GL_m(D)$ or $GL_m(O_D)$; D ← division alg. over $\mathbb{Q}_p$; isoclinic part of an F-isocrystal

§3 p-adic monodromy of elliptic curves

$\mathcal{E}[p^n] \longrightarrow S_{ord} = \mathbb{A}^1 - \{0, 1, \text{zeroes of } A(\lambda)\}$

$/\text{char } p$ field $k = \bar{k}$

$\forall \lambda \in S_{ord}$, $\mathcal{E}[p^n](\overline{k(\lambda)}) \cong \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$

Let $K = k(\lambda) = k(S_{ord})$ function field of S

$\rho_{p,n} : Gal(K^{sep}/K) \longrightarrow Aut(E[p^n](\bar{K})) \cong (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times$

Galois action on $E[p^n](\bar{K})$

$\rho_p = \varprojlim \rho_{p,n} : Gal(K^{sep}/K) \longrightarrow \mathbb{Z}_p^\times$

"global p-adic monodromy"

Thm (Igusa 1968) ρ_p is surjective

global p-adic monodromy

$\forall\, x \in S_{ord}(k)$, have

$\lambda = \lambda_0$

$$L := k((\lambda-\lambda_0)) \longleftrightarrow k(\lambda) = K$$

Laurent series in $(\lambda-\lambda_0)$

$$\begin{tikzcd}
\rightsquigarrow \mathrm{Gal}(L^{sep}/L) \arrow[r] \arrow[dr, "\rho_{p,x}"'] & \mathrm{Gal}(K^{sep}/K) \arrow[d, "\rho_p"] \\
& \mathbb{Z}_p^{\times}
\end{tikzcd}$$

local monodromy

<u>Thm'</u> $\rho_{p,x} : \mathrm{Gal}(L^{sep}/L) \longrightarrow \mathbb{Z}_p^{\times}$

is surjective

$\Downarrow$

Thm (local monodromy is already surjective)

Sketch of proof of Thm'

w.r.t. a suitable parameter x

for $\mathcal{E}_{/k[[\lambda-\lambda_0]]}$

$$[p]_{\mathcal{E}}(x) = A(\lambda)\, x^p + \alpha x^{p^2} + \begin{pmatrix}\text{higher order}\\ \text{terms } x^{p^i}\end{pmatrix}$$

$$= V(x^p)$$

where $V(x) = A\cdot x + \alpha\cdot x^p + \begin{pmatrix}\text{higher}\\ \text{order}\end{pmatrix}$

$$\alpha \in k[[A]]^\times \cong k[[\lambda-\lambda_0]]^\times$$

a generator of $E[p^n]$

$\longleftrightarrow (y_0, y_1, \cdots, y_{n-1})$ s.t.

$V(y_0) = 0$, $y_0 \neq 0$ i.e. $A + \alpha y_0'$

$V^{(p)}(y_1) = y_0 = A^p y_1 + \alpha^p y_1^p + \begin{pmatrix}\text{high order}\\ \text{terms of } y_1\end{pmatrix}$

$\vdots$

$V^{(p^{n-1})}(y_{n-1}) = y_{n-2} = A^{p^{n-1}} y_{n-1} + \alpha^{p^{n-1}} y_{n-1}^p$

$+ \begin{pmatrix}\text{higher order}\\ \text{terms of } y_{n-1}\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \mathrm{ord}_A(y_0) = \frac{1}{p-1}$

$\mathrm{ord}_A(y_1) = \frac{1}{p(p-1)}, \cdots, \mathrm{ord}_A(y_{n-1}) = \frac{1}{p^{n-1}(p-1)}$

§4 Generalization: p-adic monodromy for Hilbert modular varieties

F: totally real nber field

$\bar{k} = k \supseteq \mathbb{F}_p$ p **unramified** in $\mathcal{O}_F$

$\mathcal{M}_F$ Hilbert modular varieties $/k$

classifying:

A : abelian variety, $\dim(A) = [F:\mathbb{Q}]$

$\alpha : \mathcal{O}_F \longrightarrow \mathrm{End}(A)$ (action by $\mathcal{O}_F$)

$$\lambda : \mathfrak{D}_F^{-1} \longrightarrow \mathrm{Hom}^{sym}_{\mathcal{O}_F}(A, A^t)$$

← dual abel var.

$$\underbrace{\mathfrak{D}_F^{-1} \cap (\mathfrak{D}_F^{-1} \otimes \mathbb{R})^+}_{\text{notion of positivity for } \mathfrak{D}_F^{-1}} \longrightarrow \{\mathcal{O}_F\text{-linear polarizations}\}$$

(the first line maps into the second: $\cup$ under $\mathfrak{D}_F^{-1}$ and under $\mathrm{Hom}^{sym}_{\mathcal{O}_F}(A, A^t)$)

s.t. $A \otimes_{\mathcal{O}_F} \mathfrak{D}_F^{-1} \xrightarrow{\sim} A^t$

Fact: $\dim(\mathcal{M}_F) = [F:\mathbb{Q}]$

$\mathcal{M}_F$: smooth $/k$

$\mathcal{M}_F^{ord}$: ordinary locus

This means :

$$\forall x \in \mathcal{M}_F^{ord}, \quad A_x[p^n](\overline{k(x)}) \cong (\mathcal{O}_F/p\,\mathcal{O}_F)^\times$$

$$\prod_{\mathfrak{p} \in \Sigma_{F,p}} A_x[\mathfrak{p}^n]$$

places of F above p

Fact: $\mathcal{M}_F \setminus \mathcal{M}_F^{ord} = \bigcup_{\iota : \mathcal{O}_F \to k} D_\iota = \bigcup_{\mathfrak{p} \in \Sigma_{F,p}} \bigcup_{\iota : \mathcal{O}_F/\mathfrak{p} \to k} D_\iota$

divisor with normal crossings

$$\rho_p : \underset{\underset{K}{\shortparallel}}{k(\mathcal{M}_F^{ord})} \longrightarrow (\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p)^\times = \prod_{\mathfrak{p} \in \Sigma_{F,p}} \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^\times$$

global monodromy

$\forall x \in \mathcal{M}$, let $U_x := \mathcal{M}_F^{/x} \times_{\mathcal{M}_F} \mathcal{M}_F^{ord}$

Have $\rho_{x,p} : \pi_1(U_x) \longrightarrow \prod_{\mathfrak{p}} \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^\times$

local monodromy

independence + maximality of local monodromy

Thm 1) $\exists$ closed subgroups $H_{\mathfrak{p}} \in \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^{\times}$

s.t. $\mathrm{Im}(\rho_{x,p}) = \prod_{\substack{x \in D_\iota \\ \iota : \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p} \to k}} H_{\mathfrak{p}}$

(an "independence of x" statement)

2) $H_{\mathfrak{p}} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^{\times}$ is open $\forall \mathfrak{p} \in \Sigma_{F,p}$

("pure-thought" proof, by group theory)

3) $H_{\mathfrak{p}} = \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^{\times}$ $\forall \mathfrak{p} \in \Sigma_{F,p}$

(By a calculation generalizing the modular curve case, use Cartier theory)