Moduli of abelian varieties and Hecke symmetries

State College, 2025

§1. Moduli of abelian varieties over $\mathbb{C}$ and Hecke symmetries

§2. $\mathcal{A}_g$ as an algebraic variety, char. $= p > 0$ examples, fine structures on $\mathcal{A}_g/_{\overline{\mathbb{F}}_p}$

§3. Hecke orbits and foliation on $\mathcal{A}_g/_{\overline{\mathbb{F}}_p}$

§4. Local structure of leaves, and rigidity of Tate-linear formal varieties

§1. Moduli of abelian varieties over $\mathbb{C}$

Definition. An abelian variety A over $\mathbb{C}$ is a connected compact complex Lie group which can be embedded in $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ as a closed complex submanifold.

$\rightsquigarrow$ A = zero locus of homogeneous polynomials

$$f_1(x_0,\dots,x_n),\dots,f_N(x_0,\dots,x_n)$$

group law: also expressed by polynomials

elliptic curves = 1-dim$^{\underline{l}}$ abelian varieties

They go back to Fermat, Fagnano (1718), Euler (1753), Gauss, Abel (1827), Jacobi (1829)

Examples

(i) $\{ X^3 + Y^3 = Z^3 \}$ Fermat cubic

(ii) $\{ Y^2 Z^2 = Z^4 - X^4 \}$ Fagnano / Euler

Euler: $$\int_0^u \frac{dt}{\sqrt{P(t)}} + \int_0^v \frac{ds}{\sqrt{P(s)}} = \underbrace{\int_0^w \frac{dr}{\sqrt{P(r)}}}_{\text{lemniscate differential}}$$

where $P(x) = 1 + ax^2 - x^4$ $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$w = \frac{u\sqrt{P(u)} + v\sqrt{P(v)}}{1 + u^2 v^2}$$

(iii) $E = \{ -Z^4 + X^2 Z^2 + Y^2 Z^2 + X^2 Y^2 = 0 \} \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$

The last entry of Gauss' diary

(an affine equation: $v^2 = 1 - u^4$
with $u = \frac{X}{Z}$, $v = \frac{Z^2 - X^2}{YZ}$)

Abel, Crelle 2, 1827

XVI.

RECHERCHES SUR LES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von *Crelle*, Bd. 2, 3. Berlin 1827, 1828.

Depuis longtemps les fonctions logarithmiques, et les fonctions exponentielles et circulaires, ont été les seules fonctions transcendantes, qui ont attiré l'attention des géomètres. Ce n'est que dans ces derniers temps, qu'on a commencé à en considérer quelques autres. Parmi celles-ci il faut distinguer les fonctions nommées elliptiques, tant pour leur belles propriétés analytiques, que pour leur application dans les diverses branches des mathématiques. La première idée de ces fonctions à été donnée par l'immortel *Euler*, en démontrant, que l'équation séparée

$$\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4}}+\frac{dy}{\sqrt{\alpha+\beta y+\gamma y^2+\delta y^3+\varepsilon y^4}}=0$$

est intégrable algébriquement. Après *Euler*, *Lagrange* y a ajouté quelque chose, en donnant son élégante théorie de la transformation de l'intégrale $\int\frac{R.dx}{\sqrt{(1-p^2x^2)(1-q^2x^2)}}$, où R est une fonction rationnelle de x. Mais le premier et, si je ne me trompe, le seul, qui ait approfondi la nature de ces fonctions, est M. *Legendre*, qui, d'abord dans un mémoire sur les fonctions elliptiques, et ensuite dans ses excellents Exercices de mathématiques, a développé nombre de propriétés élégantes de ces fonctions, et en a montré l'application. Depuis la publication de cet ouvrage, rien n'a été ajouté à la

Jacobi, Fundamenta Nova, 1829

INDEX RERUM.

Riemann 1857

VI.

Theorie der Abel'schen Functionen.

(Aus Borchardt's Journal für reine und angewandte Mathematik, Bd. 54. 1857.)

I. Allgemeine Voraussetzungen und Hülfsmittel für die Untersuchung von Functionen unbeschränkt veränderlicher Grössen.

Die Absicht, den Lesern des Journals für Mathematik Untersuchungen über verschiedene Transcendenten, insbesondere auch über Abel'sche Functionen vorzulegen, macht es mir wünschenswerth, um Wiederholungen zu vermeiden, eine Zusammenstellung der allgemeinen Voraussetzungen, von denen ich bei ihrer Behandlung ausgehen werde, in einem besonderen Aufsatze voraufzuschicken.

Für die unabhängig veränderliche Grösse setze ich stets die jetzt allgemein bekannte Gauss'sche geometrische Repräsentation voraus, nach welcher eine complexe Grösse $z = x + yi$ vertreten wird durch einen Punkt einer unendlichen Ebene, dessen rechtwinklige Coordinaten x, y sind; ich werde dabei die complexen Grössen und die sie repräsentirenden Punkte durch dieselben Buchstaben bezeichnen. Als Function von $x + yi$ betrachte ich jede Grösse w, die sich mit ihr der Gleichung

$$i \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y}$$

gemäss ändert, ohne einen Ausdruck von w durch x und y vorauszusetzen. Aus dieser Differentialgleichung folgt nach einem bekannten Satze, dass die Grösse w durch eine nach ganzen Potenzen von $z - a$ fortschreitende Reihe von der Form $\sum_{n=0}^{n=\infty} a_n (z - a)^n$ darstellbar ist, sobald sie in der Umgebung von a allenthalben *einen* bestimmten mit z stetig sich ändernden Werth hat, und dass diese Darstellbarkeit stattfindet bis zu einem Abstande von a oder Modul von $z - a$, für welchen eine Unstetigkeit eintritt. Es ergiebt sich aber aus den Betrachtungen, welche der Methode der unbestimmten Coefficienten zu Grunde liegen, dass

Riemann: S: compact connected Riemann surface

$g = \mathrm{genus}(S)$, i.e. $\chi(S) = 2-2g$

$\gamma_1, \dots, \gamma_{2g}$: $\mathbb{Z}$-basis of $H_1(S, \mathbb{Z})$,

$$\Delta(\gamma_1, \dots, \gamma_{2g}) = (\gamma_i \frown \gamma_j) \in M_{2g}(\mathbb{Z})$$

$\omega_1, \dots, \omega_g$: $\mathbb{C}$-basis of $H^0(S, \Omega^1) = \{\text{holomorphic 1-forms on } S\}$

$\rightsquigarrow$ period matrix

$$\mathrm{Hom}(H_1(S,\mathbb{Z}), H^0(S,\Omega^1)^\vee)$$

$$P = P(\omega_1, \dots, \omega_g; \gamma_1, \dots, \gamma_{2g}) = \left(\int_{\gamma_i} \omega_r\right) \in M_{g \times 2g}(\mathbb{C})$$

Riemann

$$\begin{cases} P \cdot \Delta(\gamma_1, \dots, \gamma_{2g})^{-1} \cdot {}^t P = 0_g \\ -\sqrt{-1} \cdot P \cdot \Delta(\gamma_1, \dots, \gamma_{2g}) \cdot {}^t \overline{P} : \text{hermitian positive definite} \end{cases}$$

Normalize: Choose $\gamma_1, \dots, \gamma_{2g}$ s.t. $\Delta(\gamma_1, \dots, \gamma_{2g}) = \begin{pmatrix} 0 & I_g \\ -I_g & 0 \end{pmatrix}$

Write $P(\gamma_1, \dots, \gamma_{2g}) = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \end{pmatrix}$, $P_1, P_2 \in M_g(\mathbb{C})$

$\rightsquigarrow \det(P_1) \neq 0$, $\Omega := P_1^{-1} \cdot P_2$ symmetric

and $\mathrm{Im}(\Omega) \in M_g(\mathbb{R})$ is symmetric and positive definite

Definition: $\mathbb{H}_g := \left\{ \Omega \in M_g(\mathbb{C}) \;\middle|\; \begin{array}{l} {}^t\Omega = \Omega \\ \mathrm{Im}(\Omega) \gg 0 \end{array} \right\}$

Siegel upper-half space of genus g

Theorem (Riemann, Poincaré)

Let $P = (P_1, P_2) \in M_{g\times 2g}(\mathbb{C})$, $P_1, P_2 \in M_g(\mathbb{C})$. Then the compact complex tori $\mathbb{C}^g / P\cdot\mathbb{Z}^{2g}$ is an abelian variety (i.e. $\exists$ sufficiently many meromophic functions on $\mathbb{C}^g/P\cdot\mathbb{Z}^{2g}$) iff $\exists$ a skew symmetric matrix $\Delta \in M_{2g}(\mathbb{Z})$ with $\det(\Delta) \neq 0$ s.t. the Riemann bilinear relations are satisfied.

Note: If P = the period matrix of a compact Riemann surface S, then

$$H^0(S, \Omega_S)^\vee / \operatorname{Image}(H_1(S; \mathbb{Z})) \cong \left\{ \begin{array}{l} \text{divisor classes of} \\ S \text{ with degree} = 0 \end{array} \right\}$$

$$=: \operatorname{Jac}(S)$$

Definition. A <u>polarization</u> on an abelian variety A over $\mathbb{C}$ is an algebraic / rational equivalence class of positive line bundle / ample divisor on A.

algebraic interpretation:

$\mathcal{L}$: ample line bundle on A

$\rightsquigarrow \varphi_{\mathcal{L}} : A \longrightarrow A^t =$ dual abelian var. parametrizing line bundles alg. equiv. to 0 (modulo isomorphisms)

Need the notion of polarization to produce moduli spaces of abelian varieties.

$[\mathcal{L}]$: polarization on A, $g = \dim(A)$

$\rightsquigarrow \quad (\mathcal{L})^g / g! = \deg \varphi_{\mathcal{L}}$ is a square

$\mathcal{A}_g$ = "the moduli space of g-dim$^{\underline{l}}$ principally polarized abelian varieties"

exists as an algebraic variety / stack

($\exists$ at least 3 proofs : GIT, theta constants
Artin's method)

$/\mathbb{C}$: $\mathcal{A}_g = {}^{\text{"}} Sp_{2g}(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}_g {}^{\text{"}}$

$$\begin{array}{ccc} Sp_{2g}(\mathbb{Z}) & & \mathbb{H}_g \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \gamma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} & : & \Omega \longmapsto (A\Omega + B)\cdot(C\Omega + D)^{-1} \end{array}$$

Salient feature:

- The action of $Sp_{2g}(\mathbb{Q})$ on $\mathbb{H}_g$ induces finite étale correspondences on $\mathcal{A}_g$ — Hecke correspondences
- adelic formulation:

  $\exists$ canonical infinite etale Galois cover $\widetilde{\mathcal{A}_g} \longrightarrow \mathcal{A}_g$ with Galois group $Sp_{2g}(\hat{\mathbb{Z}}) = \prod_\ell Sp_{2g}(\mathbb{Z}_\ell)$, the $Sp_{2g}(\hat{\mathbb{Z}})$-action extends to an action of $Sp_{2g}(\mathbb{A}_f)$

  $\left(\hat{\mathbb{Z}} = \prod_\ell \mathbb{Z}_\ell \, , \; \mathbb{A}_f = \hat{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \prod_\ell{}' \mathbb{Q}_\ell \right)$

Siegel 1939

Einführung in die Theorie der Modulfunktionen n-ten Grades.

Von

Carl Ludwig Siegel in Göttingen.

Trotz der Bemühungen ausgezeichneter Mathematiker befindet sich die Theorie der analytischen Funktionen mehrerer Variabeln noch in einem recht unbefriedigenden Zustand. Dies liegt wohl zum Teil daran, daß wir noch nicht genügend Erfahrung gesammelt haben, um überblicken zu können, welche speziellen Arten von Funktionen sich mit den heutigen Mitteln der Analysis näher untersuchen lassen. Der klassischen Funktionentheorie einer Variabeln war ja eine 200jährige Entwicklung vorangegangen, in welcher man erst ganz allmählich von den elementaren transzendenten Funktionen und den elliptischen Integralen her zu allgemeineren Begriffsbildungen gekommen ist. Obwohl nun Fragestellungen verschiedener mathematischer Disziplinen schon vor längerer Zeit auf Probleme der Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen geführt haben, so verfügen wir in dieser Theorie doch nur über recht wenige nichttriviale Beispiele von solchen Funktionsklassen, deren Eigenschaften wir näher durchschauen. Es handelt sich bei diesen Beispielen um Funktionen, welche bei gewissen Gruppen von Transformationen der Variabeln entweder invariant bleiben oder dabei selbst in einfacher Weise transformiert werden. Solche Funktionen traten zuerst beim Umkehrproblem der Abelschen Integrale auf. Man kam dann bei der Untersuchung der Abelschen Funktionen auf die allgemeinen Thetafunktionen und die $2n$-fach periodischen meromorphen Funktionen von n Variabeln[1]). Ferner hat Picard[2]) Funktionen zweier Veränderlichen betrachtet, die bei einer Gruppe projektiver Transformationen dieser Veränderlichen invariant bleiben, also eine Verallgemeinerung der automorphen Funktionen einer Variabeln. Später behandelte

[1]) Vgl. hierzu die ausführliche geschichtliche Übersicht im Enzyklopädie-Referat II, B 7 von A. Krazer und W. Wirtinger über Abelsche Funktionen und allgemeine Thetafunktionen.

[2]) E. Picard, Sur une classe de groupes discontinus de substitutions linéaires et sur les fonctions de deux variables indépendantes restant invariables par ces substitutions, Acta mathematica 1 (1882), S. 297—320.

Hecke 1937

Über Modulfunktionen und die Dirichletschen Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung. I.

Von

E. Hecke in Hamburg.

Inhaltsverzeichnis.

Die Tatsache, daß die meisten Dirichlet-Reihen mit einer Funktionalgleichung des bekannten Typus aus Modulfunktionen hervorgehen und daß viele eine Eulersche Produktentwicklung haben, vermöge der sie mit den Primzahlen zusammenhängen, hat mich dazu geführt, diese Zusammenhänge genauer zu untersuchen. Die grundsätzliche Klärung der Beziehungen zwischen Dirichlet-Reihen mit Funktionalgleichung und Modulfunktionen — allgemeiner: automorphen Funktionen — habe ich in einer kürzlich erschienenen Arbeit[1]) gegeben. Ich werde jetzt zeigen, daß auch das Auftreten des Euler-Produktes bei diesen Funktionen nicht auf die bekannten Beispiele beschränkt ist, sondern eine neue Eigenschaft der Modulfunktionen ist, die sich nach Adjunktion gewisser kommutativer Matrizen (deren Elemente Konstanten sind) in großer Allgemeinheit überraschend einfach durch ein Euler-Produkt in diesem Matrizenring formulieren läßt.

Die so gefundenen Sätze der Funktionentheorie scheinen speziell für die Theorie der ganzzahligen quadratischen Formen von $2k$ Variabeln von

[1]) E. Hecke, Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch ihre Funktionalgleichung, Math. Annalen 112 (1936), S. 664.

Direct / explicit description:

$[(A_1,\lambda_1)]$ and $[(A_2,\lambda_2)]$ on $\mathcal{A}_g$ are related by a Hecke correspondence if $\exists$ (B,μ) and isogenies $A_1 \xleftarrow{\xi_1} B \xrightarrow{\xi_2} A_2$ s.t. $\xi_1^*(\lambda_1) = \xi_2^*(\lambda_2)$

Over base fields of characteristic $p>0$ (such as $\overline{\mathbb{F}_p}$): use the prime-to-p tower over $\mathcal{A}_g$ (corresponding to separable isogenies), and replace $Sp_{2g}(\mathbb{A}_f)$ by $Sp_{2g}(\mathbb{A}_f^{(p)})$.

$$\mathbb{A}_f^{(p)} = \prod_{\ell\neq p}{}' \mathbb{Q}_\ell = \Big(\prod_{\ell\neq p}\mathbb{Z}_\ell\Big)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$$

§2. Abelian varieties and their moduli in char. $p>0$

What's new / bad about abelian varieties in char. p?

- $[p] = p \cdot id_A : A \longrightarrow A$ is inseparable

$\rightsquigarrow \#A[p](\bar{k}) = p^{f(A)}$, $0 \leq f(A) \leq \dim(A)$. k = base field.

When $f(A) = \dim(A)$, say A is ordinary

Example

(i) For Gauss' elliptic curve with affine equation

$$1 = x^2 + y^2 + x^2y^2 / \overline{\mathbb{F}_p} \qquad p > 2$$

ordinary $\Longleftrightarrow$ $p \equiv 1 \pmod 4$

(ii) Formula for the Hasse invariant in the Legendre family

$$y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$$

in char. p:

$$\Phi(\lambda) = \sum_{\nu=0}^{(p-1)/2} \binom{\frac{p-1}{2}}{\nu}^2 \lambda^\nu$$

(Hasse, Crelle 172, pp. 77–85, 1934)

$\rightsquigarrow$ # (supersingular j-values) $\sim \frac{p}{12}$

$A_{/\overline{\mathbb{F}}_p}$: abelian variety.

important geometric object which encodes the algebraic De Rham cohomology group $H^1(A, \Omega^\bullet_A)$ + semi-linear operators F, V :

$A[p^\infty] = \varinjlim_n A[p^n]$, the p-divisible group attached to A

"All" p-adic invariants which give rise to reasonable stratifications on $\mathcal{A}_{g/\overline{\mathbb{F}}_p}$ arise from (polarised) p-divisible groups

⇝ Many "fine structures" on $\mathcal{A}_g/\overline{\mathbb{F}_p}$, all stable under prime-to-p Hecke symmetries.

- No definitive organizing principle or a few theorem from which most known results can be derived.
- $\mathcal{A}_g/\overline{\mathbb{F}_p}$ is not "homogeneous".

(Another long open problem on $\mathcal{A}_g$: Find an algebraic interpretation of Eisenstein series as sections of line bundles on $\mathcal{A}_g$.)

An invariant of $A[p^\infty]$ over $\overline{\mathbb{F}}_p$: slopes

$A[p^\infty]_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ has $2\cdot g$ slopes $0 \le \lambda_1 \le \cdots \le \lambda_{2g} \le 1$, $g = \dim A$

$\lambda_i \in \mathbb{Q}$, $\lambda_i + \lambda_{2g+1-i} = 1 \ \forall i$

$A[p^\infty] \underset{\text{isogenous}}{\sim} X_1 \times \cdots \times X_r$

each X_j is isoclinic (having only one slope, repeated a number of times)

A is ordinary $\iff \lambda_1 = \cdots = \lambda_g = 0$, $\lambda_{g+1} = \cdots = \lambda_{2g} = 1$

The opposite extreme: $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{2g} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow A \underset{\text{isog.}}{\sim} E_1 \times \cdots \times E_g$ $\quad E_i$: supersingular elliptic curve

$\rightsquigarrow$ say A is supersingular

§3 Hecke orbits and Foliation on $\mathcal{A}_{g/\overline{\mathbb{F}}_p}$

Theorem (CLC 1995) Every ordinary prime-to-p Hecke orbit is dense in $\mathcal{A}_{g/\overline{\mathbb{F}}_p}$

Definition (Oort 2000)

Given $x_0 = [(A_0, \lambda_0)] \in \mathcal{A}_g(\overline{\mathbb{F}}_p)$, the central leaf $\mathcal{C}(x_0)$ in $\mathcal{A}_{g/\overline{\mathbb{F}}_p}$ is the locally closed smooth subvariety of $\mathcal{A}_{g/\overline{\mathbb{F}}_p}$ s.t.

$$\mathcal{C}(x_0)(\overline{\mathbb{F}}_p) = \left\{ [(B,\mu)] \in \mathcal{A}_g(\overline{\mathbb{F}}_p) : (B,\mu)[p^\infty] \cong (A_0,\lambda_0)[p^\infty] \right\}$$

Expectation (Hecke orbit conjecture, proved 2004)

The prime-to-p Hecke orbit of x_0 is dense in $C(x_0)$ $\forall x_0 \in \mathcal{A}_g(\overline{\mathbb{F}_p})$.

Challenge Understand the foliation structure on $\mathcal{A}_g/\overline{\mathbb{F}_p}$

(1) Find a scheme theoretic definition of central leaves.

(2) Local structure of leaves

- incidence relation of leaves, i.e. describe the Zariski closure of a central leaf and its singularities.

scheme-theoretic definition of central leaves

Ans
2014

Given $x_0 = [(A_0, \lambda_0)] \in \mathcal{A}_g(\overline{\mathbb{F}_p})$,

$\mathcal{C}(x_0)$ = the largest subscheme $Z \subseteq \mathcal{A}_g$ s.t. the restriction to Z of the universal polarized abelian scheme over $\mathcal{A}_g$ is locally constant w.r.t. the flat fpqc topology.

i.e. $\exists$ faithfully flat morphism $T \longrightarrow Z$ and isomorphism

$$(\mathcal{A}, \lambda) \times_{\mathcal{A}_g} Z \xrightarrow{\sim} (A_0, \lambda_0) \times Z$$

§4 Local structure of leaves and rigidity

phenomenon: $C(x_0)^{/x_0}$ = the formal completion of $C(x_0)$ at x_0

has a Tate-linear structure: it is assembled from a collection of p-divisible formal groups over $\overline{\mathbb{F}}_p$.

Examples (i) Suppose that A_0 is ordinary, then $C(x_0)^{/x_0}$ has a natural structure as a formal torus of dimension $g(g+1)/2$

(Serre-Tate, 1964)

(ii) Suppose that $A_0[p^\infty] \cong X \times Y$, where X, Y are isoclinic p-divisible groups of height 3 and slopes $\frac{1}{3}$ and $\frac{2}{3}$ (so $\dim(A) = 3$)

(i.e. X is a 1-dim^{l} formal group of height 3 and the p-divisible group Y is isomorphic to the Serre dual of X)

$\rightsquigarrow$ $C(x_0)^{/x_0}$ has a natural structure as an isoclinic p-divisible group of height $=6$, slope $= \frac{1}{3}$, $\dim = 2$

Note: $\dim(A_3) = 6$, $\frac{1}{3} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}$,

$\dim\left(A_{3/\mathbb{F}_p} \setminus A^{ord}_{3/\mathbb{F}_p}\right) = 3$, $\dim C(x_0) = 2$

The group law on $C(x_0)^{/x_0}$ comes from Baer sum in $\mathrm{Ext}(X, Y)$

Tate-linear structure and rigidity:

(1) $\exists$ a sheaf of nilpotent groups N for the flat fpqc topology on $\mathrm{Spec}(\overline{\mathbb{F}}_p)$, a "slope filtration" on N whose successive quotients are attached to isoclinic p-divisible formal groups over $\overline{\mathbb{F}}_p$, and an isomorphism

$$N_{\mathbb{Q}}/N \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(x_0)^{/x_0}$$

$N_{\mathbb{Q}}$ is the Mal'cev completion of N

(N is torsion-free and ℓ-divisible $\forall \ell \neq p$)

Smooth formal varieties of the form $N_{\mathbb{Q}}/N$ are called Tate-linear formal varieties.

(2) Rigidity of Tate-linear formal varieties

<u>Thm</u> Suppose that T is a Tate-linear formal variety over $\overline{\mathbb{F}}_p$, G is a compact p-adic Lie group operating strongly nontrivially on T

(i.e. the Lie algebra of G acts non-trivially on every Jordan-Hölder component of T)

and $Z \subseteq T$ is an irreducible closed formal subvariety of T stable under G. Then Z is a Tate-linear formal subvariety of T.

<u>Example</u> $$k[\![x_1,\dots,x_n]\!] \xrightarrow{m^*} k[\![x_1,\dots,x_n]\!] \hat{\otimes}_k k[\![x_1,\dots,x_n]\!]$$
$$x_i \longmapsto x_i \otimes 1 + 1 \otimes x_i + x_i \otimes x_i \quad \forall i$$

$$\rightsquigarrow \quad [1+p^2]^* : k[\![x_1,\dots,x_n]\!] \longrightarrow k[\![x_1,\dots,x_n]\!]$$
$$x_i \longmapsto x_i + x_i^{p^2} + x_i^{p^2+1} \quad \forall i$$

If P is a prime ideal of $k[\![x_1,\dots,x_n]\!]$ s.t. $[1+p^2]^* P = P$, then

$$m^*(P) \subseteq P \otimes k[\![x_1,\dots,x_n]\!] + k[\![x_1,\dots,x_n]\!] \otimes P$$